Linear Algebras 2 Problem Set 1 November 2013

[1]　$\mathbb{R}^2$ で次の点の移動を考える。そのうち線形変換と思われるものを選び、それを標準基底に関して表現する行列を求めよ。

(1)　原点中心に反時計回りに $90°$ 回転させる。

(2)　$x-$ 軸方向に 1 平行移動させる。

(3)　直線 $x+y=3$ に関して対称移動させる。

(4)　原点に関して点対称移動させる。

[2]　線形変換 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1)　平面 $x-y+z=0$ はどのような図形に移されるかしらべよ。

(2)　平面 $x-y+z=1$ はどのような図形に移されるかしらべよ。

(3)　平面 $x+y+z=1$ はどのような図形に移されるかしらべよ。

[3]　次の線形写像 T の与えられた基底に関する表現行列を求めよ。medskip

(1)　$T(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbb{X} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

(2)　$T(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbb{X} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^4$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$、$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

[4]　次の線形変換 T の与えられた基底に関する表現行列を求めよ。

(1)　$T(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\mathbb{X} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$、

(2)　$T(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbb{X} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$、 (3)　$T(f)(x) = 2f'(x) + 3f(x) : \mathbb{P}_2[x] \longrightarrow \mathbb{P}_2[x]$、$\mathbb{P}_2[x]$ の基底 $\left[1, x, x^2\right]$

(4)　$T(f)(x) = 2f'(x) + 3f(x) : \mathbb{P}_2[x] \longrightarrow \mathbb{P}_2[x]$、$\mathbb{P}_2[x]$ の基底 $\left[1+x, x+x^2, 1-x^2\right]$

[5]　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への次の線形写像 ϕ が同型となる為の a の条件を求めよ。

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

[6]

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して線形写像 $T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の核 $\mathrm{Ker}T_A$、像 $\mathrm{Im}T_A$ の基底と次元を求めよ。

(2)　$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して線形写像 $T_A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ の核 $\mathrm{Ker}T_A$、像 $\mathrm{Im}T_A$ の基底と次元を求めよ。

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ に対して線形写像 $T_A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ の核 $\mathrm{Ker}T_A$、像 $\mathrm{Im}T_A$ の基底と次元を求めよ。

[7]　2 次の正方行列全体の為すベクトル空間を M_2 とする。$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2$ とし、写像 $f_A : M_2 \longrightarrow M_2$ を $f_A(X) = AX, \quad X \in M_2$ で定義する。
M_2 の基底 $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$ に関する f_A の表現行列を求めよ。

[8]　n 次正方行列全体の作るベクトル空間を M_n とする。

(1)　$A = (a_{ij}) \in M_n$ に対して $Tr : M_n \to \mathbb{R}$ を次式で定義する。

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

このとき Tr は線形写像であることを示せ。

(2)　$A \in M_n$ に対して $\phi_A : M_n \to \mathbb{R}$ を $\phi_A(X) = Tr(AX)$ で定義する。ϕ_A は線形であることを示せ。

(3)　任意の線形写像 $\psi : M_n \to \mathbb{R}$ は適当な A を用いて $\psi = \phi_A$ と書ける。$n = 2, 3$ のときこのことを示せ。