Linear Algebras 2 Problem Set 2 Answers, January, 2014

[1]

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{b}_2||}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{b}_3||}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2]

$(g_1, g_1) = \int_{-1}^{1} 1^2 dx = 2$。$(g_1, g_2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x dx = 0$, $(g_1, g_3) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$。

ポイント

多項式という通常の列ベクトルではないベクトル空間に内積が導入されている。

$f_1 = \dfrac{1}{||g_1||}g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$h_2 = g_2 - (g_2, f_1)f_1 = x = g_2$。$||h_2||^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$。よって $f_2 = \dfrac{1}{||h_2||}h_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}x$

$h_3 = g_3 - (g_3, f_1)f_1 - (g_3, f_2)f_2 = x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \dfrac{1}{3}$。

$||h_3||^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \frac{8}{145}$。よって $f_3 = \dfrac{1}{||h_3||}h_3 = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \dfrac{1}{3})$。

$[\ f_1,\ f_2,\ f_3\ ]$ が求める正規直交基底。

[3]

ポイント

固有値を求める＝＞各固有値に関する固有ベクトルを求める

---

(1)　$\Phi_A(x) = |A - xE| = -(x-3)(x-4)(x-5) = 0$ 相異なる３つの固有値。よって対角化可能。固有値 3,4,5 それぞれに対する固有ベクトルを並べて $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

,

(2)　固有値は 2 と 5(重複度２）W_5 の基底として $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるから、$\dim W_5 = 2 =$ 重複度。よって対角化可能。固有ベクトルを並べて $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)　固有値は 5 で 3 重解。$\dim W_5 = 2 \neq 3$ より対角化不可能。

(4)　固有値は $3, 2 \pm i$。このケースは実数でない固有値が存在。それに対応する固有ベクトルも複素ベクトル（成分が複素数であるベクトル）となる。実際 $2+i$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $2-i$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。また固有値 3 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。よって $P = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

[4]

ポイント――――――――――――――――――――――――――――――

対称行列は必ず直交行列で対角化できる

T が直交行列 $\Leftrightarrow$ T の列ベクトルは長さ 1 で互いに直交

対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは自動的に直交する

――――――――――――――――――――――――――――――

(1)　固有値を求めると、$\lambda = 1$(重複度２), 4。固有ベクトルを求めるまでは問 [4] と同じ。固有値４に対する固有空間は 1 次元だから基底の長さを調節して 1 にすればよい。固有値 1 に対する固有空間は２次元だから、基底に対してシュミットの直交化を適用する必要がある。答えを記す。

$$T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)　固有値は $1, -1, 3$。したがって固有ベクトルは自動的に互いに直交する。したがって長さを調節するだけでよい。

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)　固有値を求めると、$\lambda = -1$(重複度２), 3。したがって (1) と同様に -1 に対する固有空間では正規直交基底を作る必要がある。しかしながら自然に得られる基底が「偶然」互いに直交し、長さの調節だけで済む。

$$T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[5]

ポイント――――――――――――――――――――――――――――――――――――

エルミート行列の固有値は全て実数である。

エルミート行列は必ずユニタリー行列で対角化できる

T がユニタリー行列 $\Leftrightarrow$ T の列ベクトルは長さ 1 で互いに複素列ベクトルとして直交

エルミート行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは自動的に直交する

―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

(1)

$$\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & i & -1 \\ -i & 5-x & i \\ -1 & -i & 3-x \end{vmatrix} = -(x-2)(x-3)(x-4) = 0$$

よって、固有値は $2, 3, 6$。したがって固有ベクトルは**自動的**に互いに直交する。したがって長さを調節するだけでよい。

行列は複素行列になるが、固有ベクトルを求めるのは実行列の場合と全く同じ方法。

固有値 3 に対する固有ベクトルを求めてみる。

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 2 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ これから固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られ、

長さを調整して $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ が固有値 3 に対する固有空間の正規直交基底。

以下同様にして固有値 2, 6 に対する固有ベクトルをとり

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -i/\sqrt{3} & 2i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2)　(1) と同様に固有値を求めると。2 と 6 (重複度２）であることが分かる。
固有値２に対する固有ベクトルを通常の方法で求めると

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2}i \\ -1 & 3 & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & \sqrt{2}i & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2}i/2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}i/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ がえられ、長さを調整して

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2}i/2 \end{pmatrix}$

6 に対する固有空間の基底を求めると $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ が得られる。シュミットの直交化で

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$。そこで

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2i}/2 & 0 & \sqrt{2}i/2 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Linear Algebras 2 Problem Set 3 Answers, January, 2013

[1]

(1)　計算で

$$A^*A = \begin{pmatrix} 15 & -10i \\ 10i & 15 \end{pmatrix} = AA^*$$

固有値を求めると $\lambda = 5, -1+2i$ であり、次に固有ベクトルを求めると $\lambda = 5$ について $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda = -2+2i$ について $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$,

以上二つのベクトルは直交している。したがって長さの調整だけをすればよい。

$$U = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

(2) についても (1) と同様にして

$$A^*A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = AA^*$$

固有値を求めると $\lambda = 5, 5i$ であり、次に固有ベクトルを求めると $\lambda = 5$ について $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 5i$ について $\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix}$、以上二つのベクトルは直交している。したがって長さの調整だけをすればよい。

$$U = \begin{pmatrix} -2i/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2i/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5i \end{pmatrix}$$

(3) も同様

$$A^*A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = AA^*$$

次に固有値を求めると $\lambda = 1+i, 2, 2-2i$ であり、次に固有ベクトルを求めると $\lambda = 1+i$ について $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$ について $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2-2i$ について $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

以上３つのベクトルは直交している。したがって長さの調整だけをすればよい。

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix}$$

注意———————————————————————————-

実は正規行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することが言える。議論はエルミート行列の場合より少々難しくなる。

————————————————————————————-

[2]

(1)　固有値を求めると、重複度２の固有値１。固有空間の基底を求めると $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られ、固有空間の次元は１である。したがって対角化不可。$\mathbf{u_1}$ と独立なベクトル、例えば $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて $P = (\mathbf{u_1}\mathbf{u_2})$ とおけば $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u_2}$ の選び方は無数にある。$(A-E)\mathbf{u_2}=\mathbf{u_1}$ となるベクトルを求めると
$\mathbf{u_2}=\mathbf{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$。ここで t は任意の定数。どの t に対する $\mathbf{u_2}$ を用いても

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

ここで得られた最終的な上三角行列は先に得たものと違うことに注意。

(2)　固有値を求めると、重複度 2 の固有値 1。固有空間の基底を求めると $\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ が得られ、固有空間の次元は 1 である。したがって対角化不可。$\mathbf{u_1}$ と独立なベクトル、例えば $\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を用いて $P=(\mathbf{u_1}\mathbf{u_2})$ とおけば $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}$ であり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

(3)　固有値を求めると、重複度 3 の固有値 4 。固有空間の基底を求めると $\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ が得られ、固有空間の次元は 1 である。したがって対角化不可。そこで $(A-4E)\mathbf{u_2}=\mathbf{u_1}$ となるベクトルを求めると $\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$、さらに $(A-4E)\mathbf{u_3}=\mathbf{u_2}$ となるベクトルを求めると $\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$。
$P=(\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}\mathbf{u_3})$ とおけば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$\mathbf{u_1}$ と 1 次独立なベクトルとして $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて $P = (\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}\mathbf{u_3})$ とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が得られる。

(4)　先ず固有値・固有ベクトルを求める。固有値は 4 と 3 で 3 の重複度は 2 である、固有値 3 に対する固有空間の基底として $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる。従って固有空間の次元は 1 次元で重複度と異なるから対角化は不可能である。そこで $(A - 3E_3)\mathbf{u_2} = \mathbf{u_1}$ を満たす $\mathbf{u_2}$ を求めると

$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる。一方、固有値 4 に対する固有ベクトルは $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

そこで $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(5)　先ず固有値・固有ベクトルを求める。固有値は-1 と 1 で 1 の重複度は 2 である、固有値 1 に対する固有空間の基底として $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる。従って固有空間の次元は 1 次元で重複度と

異なるから対角化は不可能である。そこで $(A-E_3)\mathbf{u_2}=\mathbf{u_1}$ を満たす $\mathbf{u_2}$ を一つ求めると

$\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が得られる。一方、固有値 -1 に対する固有ベクトルは $\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

そこで $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(6)　先ず固有値・固有ベクトルを求める。固有値は-1 と 2 で 1 の重複度は 2 である、固有値 -1 に対する固有空間の基底として $\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ が取れる。従って固有空間の次元は 1 次元で重複度と異なるから対角化は不可能である。そこで $(A-(-1)E_3)\mathbf{u_2}=\mathbf{u_1}$ を満たす $\mathbf{u_2}$ を一つ求めると $\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}$ が得られる。一方、固有値 2 に対する固有ベクトルは $\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

そこで $P=\begin{pmatrix}1&5&2\\0&-3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

注意 ——————————————————————————————

例えば (4) のベクトル $\mathbf{u_2}$ は $(A-3E_3)^2\mathbf{u_2}=\mathbf{0}$ を満たす。この $\mathbf{u_2}$ は A の**一般化された固有値**と呼ばれる。このように一般に λ を固有値としたとき $(A-\lambda E)^k\mathbb{X}=0$ となる $\mathbb{X}=0$ を一般化された固有ベクトルと呼ぶ。問 [7] の例から分かるように一般化された固有ベクトルは行列を上三角化する為に用いられる。一般化された固有ベクトルを用いれば最終的な上三角行列の形はほぼあきらかだが、単に一次独立であるように選ぶと P^{-1} を計算する必要がありこれが分からないと、最終的な上三角行列の形が分からない。

——————————————————————————————

[3]　$\mathbb{C}^n$ の内積を

$$\big((x_i),(y_i)\big)=\sum x_i\overline{y_i}$$

だとする。固有値を λ とする。この時 $\mathbb{X}$ が固有ベクトルならば

$$\lambda(\mathbb{X},\mathbb{X})=(A\mathbb{X},\mathbb{X})=(\mathbb{X},A^*\mathbb{X})=-(\mathbb{X},A\mathbb{X})=-\overline{\lambda}(\mathbb{X},\mathbb{X})$$

したがって $\lambda=-\overline{\lambda}$。よって $\lambda+\overline{\lambda}=0$、これは λ はゼロでなければ純虚数であることを示す。

[4]

ポイント：ケーリー・ハミルトンの定理——————————————————

正方行列 A に対して固有方程式を $\Phi_A(x)=0$ とすると $\Phi_A(A)=0$

——————————————————————————————

(1)　$\Phi_A(x)=x^2-2x+2=0$ より $A^2-2A+2E=0$。よって

$A^4=(2A-2E)^2=4A^2-8A+4E=4(2A-2E)-8A+4E=-4E$。$E=A(E-\frac{1}{2}A)$ より

$A^{-1}=E-\frac{1}{2}A$

(2)　固有方程式は $\Phi_A(x)=-x^3-1=0$。よって

$A^3+E=0\Longrightarrow A^{100}=(A^3)^{33}A=-EA=-A$。また $E=-A^3\Longrightarrow A^{-1}=-A^2$。

[5]

ポイント——————————————————————————

２次の項の係数をピックアップして２次の**対称行列**を求める。

対角化する**直交行列**T を求める。T を用いて変数変換する。

——————————————————————————————

(1)-(3) は教科書 p. 104、例 2, 3 をマネすればできる。

(4)　２次の項の係数から $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$。対称行列 A を対角化する直交行列 T を問 [5] で使う方法、P.96, 例 3 をマネして求めると

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて変数変換すれば $5x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{2}xy = 6X^2 + 3Y^2$。

上の式から $x = -\frac{2}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{2}{\sqrt{6}}Y$。これを 1 次の項に代入して

$10x - 4\sqrt{2}y = -\frac{14\sqrt{6}}{3}X + \frac{2}{\sqrt{3}}Y$。従って

$$5x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{2}xy + 10x - 4\sqrt{2}y + 11 = 6X^2 + 3Y^2 - \frac{14\sqrt{6}}{3}X + \frac{2}{\sqrt{3}}Y + 11 = 0$$

注意――――――――――――――

教科書の答えは符号の誤りがある

―――――――――――――――――

X, Y の式を完全平方化して

$$6\Big(X - \frac{7\sqrt{6}}{18}\Big)^2 + 3\Big(Y + \frac{\sqrt{2}}{9}\Big)^2 + \frac{49}{9} = 0$$

これは虚の楕円、即ちこの方程式を満たす点は存在しない。

[6]

ポイント――――――――――――――――――――――――――――――――――

２次の項の係数をピックアップして 3 次の**対称行列**を求める。

対角化する**直交行列**T を求める。T を用いて変数変換する。

――(1)　２次の項の係数から $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。先ず固有方程式 $\Phi_A(x) = -(x-1)^2(x+2) = 0$ より、固有

値は $\lambda = 1$, (重複度 2), -2。$\lambda = 1$ に対する固有空間の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる

シュミットの直交化で固有空間 W_1 の正規直交基底を作ると $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られ

る。$\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求め、長さを調節して $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られ、

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/-\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて変数変換すれば $x^2 + Y^2 - 2Z^2 + 4 = 0$。これは二葉双曲面である。

(3)　(2) と同様にする。２次の項の係数から $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$。先ず固有方程式

$\Phi_A(x) = -x(x^2 + x - 10) = 0$ より、固有値は $0, \frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$。

ポイント

(1) では直交行列 T を具体的に求めたが、与えられた方程式が 1 次の項を含まないときは、実は具体的に求める必要はない。(1) でも以下の答えで Okay である。

一般論で直交行列 T が存在して

$$
{}^tTAT = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{41}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{41}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて変数変換すれば $\Big(\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}\Big)X^2 + \Big(\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\Big)Y^2 = 0$。これは 2 直線である。

(4)　このケースでは 1 次の項があるので、具体的に直交行列を求める必要がある。

２次の項の係数から $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$。先ず固有方程式 $\Phi_A(x) = -x^2(-6) = 0$ より、固有値は $\lambda = 0,$ (重複度 2)$, 6$。$\lambda = 1$ に対する固有空間の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる。

シュミットの直交化で固有空間 W_0 の正規直交基底を作ると $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる。$\lambda = 6$ に対する固有ベクトルを求め、長さを調節して $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られ、

$$
T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad {}^tTAT = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて変数変換すれば $X^2 - 12Y = 0$。これは放物線柱である。

注意：

もし W_0 の正規直交基底として、自然に得られる基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ にシュミットの直交化を適用して得られる、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて T を作ると、変数変換 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $X^2 - 4\sqrt{3}Y - 4\sqrt{6}Z = 0$。$YZ$ 空間で改めて変数変換をしてようやく上のような標準形が得られる。

---

(5)　この場合も 1 次の項がないので具体的に T を求めなくても、固有値が分かれば標準形は直ちに分かる。固有値は $\lambda = 9$ (重複度 2), 18。よって標準形は $9X^2 + 9Y^2 + 18Z^2 = 9$、これは楕円面である。