Linear Algebras 2 Problem Set 2, December, 2013

[1] シュミットの直交化により次のベクトルから正規直交基底を構成せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[2] ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ に内積 (,) を次式で定義する。

$$\big(f, g\big) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

$g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$ とする。基底 $[\, g_1,\ g_2,\ g_3\,]$ にシュミットの直交化を適用して正規直交基底を構成せよ。

[3] 次の行列が対角化可能かどうか判定せよ。可能ならば対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[4] 次の実対称行列を直交行列で対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[5] 次のエルミート行列をユニタリー行列で対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{2}i \\ -1 & 5 & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & \sqrt{2}i & 4 \end{pmatrix}$