

Linear Algebras 2 Problem Set 3 January, 2014

[1] 複素正方行列  $A$  は  $A^*A = AA^*$  となる時正規行列と呼ばれる。正規行列はユニタリ行列で対角化されることが知られている。次の行列は正規行列であることを確かめ、 $U^*AU$  が対角行列となるユニタリ行列  $U$  を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2+i & -1-3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 4+i & -2-2i \\ 2+2i & 1+4i \end{pmatrix}$$
$$(3) A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列  $A$  に対して正則行列  $P$  を見つけ上三角化せよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$(3) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad (4) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(5) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] 複素正方行列  $A$  は  $A^* = -A$  となる時**反エルミート行列**と呼ばれる。この時  $A$  の固有値は 0 か純虚数であることを示せ。

[4] ケーリー・ハミルトンの定理を使う問題。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  に対して  $A^4, A^{-1}$  を求めよ。

(2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  に対して  $A^{100}, A^{-1}$  を求めよ。

[5] 教科書 p.105、問3。

次の2次方程式はどのような2次曲線を表しているか調べよ。

(1)  $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 1 = 0$

(2)  $x^2 + y^2 + 2xy + x - y = 0$

(3)  $x^2 - y^2 + xy - 2 = 0$

(4)  $5x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{2}xy + 10x - 4\sqrt{2}y + 11 = 0$

[6] 教科書 p.108、問4。

次の2次方程式はどのような2次曲面を表しているか調べよ。

(1)  $xy + yz - zx + 2 = 0$

(3)  $-x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 4zx = 0$

(4)  $3x^2 + 3z^2 - 6zx - 4\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}y - 4\sqrt{3}z = 0$

(5)  $10x^2 + 13y^2 + 13z^2 - 4xy + 8yz - 4zx - 9 = 0$