Calculus 2 Problem Set 5 December 2013

[1]　次の広義積分の値を求めよ。

(1)　a を実数として、$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^a}dx\,dy$, 但し $D: 0 < x^2+y^2 \leq 1$.

(2)　$\alpha > 0$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+1)^\alpha}dx\,dy$, 但し $D: 0 \leq x, 0 \leq y$.

[2]　次の式で表される曲面をスケッチせよ。

(1)　$x^2+y^2+4z^2=10$,　(2)　$x=y^2-z^2$,　(3)　$x^2+4z^2=y^2$,　(4)　$x^2+y^2=4$,　(5) $z^2-y^2=1$,

(6)　$x=4-4y^2-z^2$,　(7)　$4x^2+9z^2=9y^2$,　(8)　$x^2+y^2-z^2=1$,　(9)　$z^2-x^2-y^2=1$,

(10)　$y^2-x^2=z$

[3]　以下の曲面の面積を求めよ。

(1)　平面 $x+2y+2z=5$ の円柱 $x=y^2, x=2-y^2$ に囲まれた部分

(2)　曲面 $x^2-2y-2z=0$ の xy 平面上の直線 $x=2, y=0, y=3x$ で囲まれた 3 角形の領域 D の上に在る部分。

(3)　円柱 $x^2+z^2=1$ の平面 $x=\pm\frac{1}{2}, y=\pm\frac{1}{2}$ にはさまれた部分。

(4)　曲面 $x^2+y+z^2=1$ から平面 $y=0$ で切り取られる面積が有限である部分。

[4]　次の累次積分を実行せよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x^2+y^2+z^2)dzdydx$,　(2)　$\displaystyle\int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi(y\sin z)dxdydz$,

(3)　$\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}dzdydx$,　(4)　$\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y}dzdydx$,

(5)　$\displaystyle\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(u+v+w)dudvdw$

[5]　次の累次積分の領域をスケッチし、積分の順序を以下の順番に書き直せ。

(a)　$dydzdx$,　(b)　$dydxdz$,　(c)　$dxdydz$

$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y}dzdydx$$

[6]　次の領域の体積を求めよ。

(1)　円柱 $z=y^2$、平面 $x=0, x=1, y=-1, y=1, z=0$ で囲まれた領域 D,

(2)　第 1 象限で xy, yz, zx 平面と $y+z=2$、放物柱 $x=4-y^2$ で囲まれた領域 D,

(3)　第 1 象限で xy, yz, zx 平面と平面 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ で囲まれた四面体 D。

[7]　次の円柱座標、球面座標による積分を実行せよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} dzrdrd\theta$,　(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3dzrdrd\theta$,

(3)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$,　(4)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} 3\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

[8]　次の積分をせよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3 drdzd\theta$,　(2)　$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta+z^2)rd\theta drdz$,

(3)　$\displaystyle\int_0^2\int_{-\pi}^0\int_{\pi/4}^{\pi/2}\rho^3\sin 2\phi d\phi d\theta d\rho$

[9]　以下の領域の体積を求めるための累次積分を書き表せ。積分を実行する必要はない。

(1)　D は xy 平面上の円周 $r=2\sin\theta$ を底面とした円柱を平面 $z=4-y$ で切り取ったもので囲まれた領域。

(2)　D は xy, yz, zx 平面、および 3 つの平面 $y=x, z=2-y, x=1$ で囲まれたプリズム状の領域。

[10]　次の領域の体積を求めよ。

(1)　D は曲面 $z=4-4(x^2+y^2), z=(x^2+y^2)^2-1$ で囲まれた領域。

(2)　領域 $x\geq 0, y\leq 0, z\geq 0$ 内で半円柱 $r=3\cos\theta$ と平面 $z=-y$ で囲まれた領域を D。

(3)　円柱 $x^2+y^2=1$ と平面 $z=0$、放物面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた領域 D。

(4)　円柱 $x^2+y^2=4$ と平面 $z=0, y+z=4$ で囲まれた領域 D。

[11]　次の立体の体積を求めるための球面座標による累次積分を書き表し、積分を実行せよ。

(1)　球面 $\rho=\cos\phi$ と北半球 $\rho=2, z\geq 0$ で囲まれた立体。　(2)　曲面 $\rho=1-\cos\phi$ で囲まれた立体。

(3)　球面 $\rho=2\cos\phi$ と円錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ で囲まれた立体。

(4)　球体 $\rho\leq a$ で円錐面 $\phi=\pi/3, \phi=2\pi/3$ にはさまれた部分。

[12]　空間内で不等式 $1\leq x\leq 2,\ \ 0\leq xy\leq 2,\ \ 0\leq z\leq 1$ で表された領域を D とする。次の 3 重積分を、変数変換 $u=x, v=xy, w=3z$ を用いて計算せよ。

$$\iiint_D (x^2y+3xyz)dxdydz$$