Calculus 2 Problem Set 1 Answers October 2013

[1] (1) 定義域 $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, 値域 $\{z|z\geq 1\}$

(2) 定義域 $\{(x,y)|xy>0\}$, 値域 $\{z|-\infty<z<\infty\}$

[2]

(1) 5/2, (2) 1/2, (3) $2\sqrt{6}$, (4) 1, (5) 1, (6) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}=x-y$ を用いる。0,

(7) $\frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2$ を用いる。2, (8) 0

[3]

(1) $y=mx$ に沿って近づけて極限を調べる, (2) $y=mx^2$ に沿って近づける。

[4]

(1) $f_x=6x, f_y=2$, (2) $f_x=4xe^y, f_y=2x^2e^y$, (3) $f_x=2x+ye^{xy}, f_y=xe^{xy}$,

(4) $f_x=-y^2/x^2, f_y=2y/x$, (5) $f_x=1/(1+e^y), f_y=-xe^y/(1+e^y)^2$,

(6) $f_x=12(9x^2y+3x)^{11}(18xy+3), f_y=12(9x^2y+3x)^{11}(9x^2)$,

(7) $f_x=e^{3x}(2x\log y+3x^2\log y), f_y=x^2e^{3x}/y$,

(8) $f_x=(1+xy-y\log y)e^{xy}, f_y=(x^2-x\log y-1/y)e^{xy}$

(9) $f_x=2y/(x+y)^2, f_y=-2x/(x+y)^2$, (10) $f_x=2y(1-x)/e^x, f_y=2x/e^x$

(11) $f_x=4x+3y, f_y=3x-8y$, (12) $z_x=\frac{1}{y}, z_y=-\frac{x}{y^2}$, (13) $f_x=\frac{1}{x}, f_y=-\frac{1}{y}$

(14) $z_x=\sin y, z_y=x\cos y$, (15) $f_x=\cos x-\sin(x+y), f_y=\cos y-\sin(x+y)$,

(16) $z_x=e^x\cos y+e^y\cos x, z_y=-e^x\sin y+e^y\sin x$, (17) $z_x=(x^2+2x+2y)e^x, z_y=2e^x$,

(18) $f_x=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, f_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, (19) $z_x=\cos 2x, z_y=\cos 2y$.

[5] $f_x(2,-3)=1, f_y(2,-3)=3$

[6] $f_x(1,2)=6, f_y(1,2)=-1$

[7]

(1) $f_x=3x^2y+2y^2, f_{xx}=6xy, f_y=x^3+4xy, f_{yy}=4x, f_{xy}=f_{yx}=3x^2+4y$,

(2) $f_x=e^y+4x^3y, f_{xx}=12x^2y, f_y=xe^y+x^4+3y^2, f_{yy}=xe^y+6y, f_{xy}=f_{yx}=e^y+4x^3$,

(3) $f_{xx}=2, f_{xy}=-2, f_{yy}=6y$

(4) $z_{xx}=-4\sin(2x-3y), z_{xy}=6\sin(2x-3y), z_{yy}=-9\sin(2x-3y)$

(5) $f_{xx}=0, f_{xy}=2e^{2y}, f_{yy}=4xe^{2y}$

(6) $z_{xx}=\frac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, z_{xy}=\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, z_{yy}=\frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$,

(7) $f_{xx}=e^x\sin y+e^y\cos x, f_{xy}=e^x\cos y+e^y\sin x, f_{yy}=-e^x\sin y-e^y\cos x$

(8) $z_{xx}=\frac{-6y}{(x+2y)^3}, z_{xy}=\frac{3(x-2y)}{(x+2y)^3}, z_{yy}=\frac{12x}{(x+2y)^3}$

[8]

(1) $f(x,y)=2+4(x-1)+(y-2)+2(x-1)^2+(x-1)(y-2)+R_3$

(2)　$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 + R_3$,

(3)　$f(x,y) = 2 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{64}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)(y-1) - \frac{1}{16}(y-1)^2 + R_3$,

(4)　$f(x,y) = -(x-1) + (y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + R_3$

[9]

(1)　接平面 $8x + 6y - z = 5$, 法線 $\frac{x-2}{8} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-5}{-1}$

(2)　接平面 $2x - y + z = 2$, 法線 $\frac{x-1}{-2} = y - 2 = \frac{z-2}{-1}$

(3)　接平面 $2x + 2y - z = 0$, 法線 $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$

(4)　接平面 $x - y + 2z = \frac{\pi}{2}$, 法線 $x - 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{4z-\pi}{8}$

[10]　(1)　$dz = \frac{-ydx+xdy}{x^2}$,　(2)　$dz = e^x(\sin y dx + \cos y dy)$,　(3)　$dz = \frac{-ydx+xdy}{xy}$,

(4)　$dz = \frac{dx+2dy}{2\sqrt{x+2y}}$

[11]　(1)　$\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{y/x}$,　(2)　$\frac{dy}{dx} = x - y + 1$,　(3)　$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

[12]　(1)　$2x - 3y = 1$,　(2)　$x + y = 6$,　(3)　$x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$

[13]

(1)　接平面 $x + 2y + 3z = 6$, 法線 $x - 1 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$

(2)　接平面 $x - 2y - 2z = 2$, 法線 $x - 2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$

(3)　接平面 $x + 2y - 4z = -5$, 法線 $x - 5 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-4}$

(4)　接平面 $5x + 4y + 3z = 22$, 法線 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$

(5)　接平面 $5x + 4y + 3z = 22$, 法線 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$

[14]

(1)　$L(x,y) = 2x + 2y - 1$,　(2)　$L(x.y) = -y + (\pi/2)$

[15]

(1) $(0.01, 0.98)$ に近い点として $(0,1)$ をとり、点 $(0,1)$ での f の線形化 $L(x,y)$ を考える。$f(0,1) = 1, f_x(0,1) = 1, f_y(0,1) = 1$。よって $L(x,y) = 1 + 1(x-0) + 1(y-1) = x + y$。したがって $f(0.01, 0.98) \approx L(0.01, 0.98) = 0.01 + 0.98 = 0.99$。

(2)　(1) と同様。点 $(0,5)$ での線形化を考えると $L(x,y) = 5x + y$。よって $f(-0.01, 5) \approx L(-0.1, 5) = -0.05 + 5 = 4.95$。

(3)　点 $(12,3)$ での線形化を考えると $L(x,y) = \frac{1}{4}x + y$。よって $f(11.9, 3.2) \approx L(11.9, 3.2, 5) = (11.9)/4 + 3.2 = 6.175$。