Calculus 2 Problem Set 2 Answers November 2013

[1]

(1)　$(0,0)$ または $(2,2)$ で極値の可能性。$(0,0)$ では $D=-36<0$。よって極値ではない。$(2,2)$ では $D>0, f_{xx}(2,2)=12>0$。よって極小値 $f(2,2)=-8$。

以下同様の議論で

(2)　$(-2,-2)$ で極小値 -8,

(3)　$(0,0)$ は極値ではない,$(-1/2,-1/2)$ で極大値 $1/4$。

(4)　$(0,0)$ $(-2,2)$ では極値ではない, (0,2) で極小値 -4 at ,(-2,0) で極大値 4

(5)　(-3,3) で極小値-5,

(6)　(-2,1) では極値でない。

(7)　(6/5, 69/25) では極値でない。

(8)　(2,-1) で極小値-6,

(9)　(0,0) では極値でない,

(10)　(0,0) で極小値 0, (1,-1) では極値でない。

(11)　(0,0) では極値でない, -64/81 at (4/9,4/3) で極小値-64/81

(12)　$f(0,1)=4$ 極大,　(13)　$f(0,0)$ は極値でない。$f(-2/3,2/3)=170/27$ 極大,

(14)　$f(0,0)$ は極値でない,$f(-1,-1)=1$: 極大,

(15)　$f(0,0)=-1$: 極大,　(16)　$f(n\pi,0)=0, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ は極値でない,

(17)　(1,2) で極小値 -7,　(18)　(2, 0) で極小値 -4, (0,0) で極値なし,

(19)　$(1,-\frac{3}{2})$ で極小値 $-\frac{5}{4}$, (0,-1), (2,-3) で極値なし,　(20)　(1,1) で極小値 -1, (0,0) で極値なし,

(21)　$(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2})$(複号同順）で極小値 $-\frac{1}{8}$, (0,0) で極値なし,　(22)　(2,2) で極小値 12.

[2] (1)　領域の内部に臨界点はない。境界上での最大最小を調べ、全体として、(0,2) で最大値 4, (0,0) で最小値 0．境界上では各辺毎に最大最小を調べる。

(2)　(0,-3) で最大値 11, (4,-2) で最小値 -10

(3)　(2,0) で最大値 4, $(3,\pm\pi/4),(1,\pm\pi/4)$ で最小値 $3\sqrt{2}/2$

(4)　$(-2,0)$ で最大値 8, (1,0) で最小値 -1,　(5)　$(2,-2)$ で最大値 18, $(-2,\frac{1}{2})$ で最小値 $-\frac{17}{4}$,

(6)　$(0,4)$ で最大値 28, $(\frac{3}{2},0)$ で最小値 $-\frac{9}{4}$.

[3]　制約条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ は閉曲線を表すから最大値・最小値が必ず存在する。

(1) $F(x,y,\lambda)=x^3+y^3-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおいて

$F_x=3x^2-2\lambda x=0, F_y=3y^2-2\lambda y=0, F_\lambda=-x^2-y^2+1=0$。これを解いて $x=0$ または $3x=2\lambda$, $y=0$ または $3y=2\lambda$。これから４つの可能性

(case1) $(x,y)=(0,0)$。これは制約条件を満たさない。不適。

(case2)$x=0, 3y=2\lambda \Rightarrow x=0, y=\pm1$。$f(0,\pm1)=\pm1$

(case3)$y=0, 3x=2\lambda \Rightarrow x=\pm1, y=0$。$f(\pm1,0)=\pm1$

(case4) $3x=2\lambda, 3y=2\lambda \Rightarrow x=y \Rightarrow (x,y)=(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ (複号同順)。

$f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})=\pm 1/\sqrt{2}$。

よって最大値は (1,0), (0,1) で１。最小値は (-1,0),(0,-1) で-1。

(2) やり方は同じだが計算が結構面倒。

$F=2x^2+2xy+y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$。$F_x=4x-2\lambda x+2y=0 \Rightarrow y=(\lambda-2)x$。これを

$F_y=2x+2y-2\lambda y=0$ に代入して $x(\lambda^2-3\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおく。

$\lambda=\lambda_1 \Longrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^2-4\lambda_1+5}}, y=\pm\dfrac{\lambda_1-2}{\sqrt{\lambda_1^2-4\lambda_1+5}} \Longrightarrow f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^2-4\lambda_1+5}}, \pm\dfrac{\lambda_1-2}{\sqrt{\lambda_1^2-4\lambda_1+5}})=$

$\dfrac{\lambda_1^2-2\lambda_1+2}{\lambda_1^2-4\lambda_1+5}=\dfrac{\lambda_1+1}{-\lambda_1+4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$。同様にして $\lambda=\lambda_2$ の時

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2^2-4\lambda_1+5}}, y=\pm\dfrac{\lambda_2-2}{\sqrt{\lambda_2^2-4\lambda_2+5}}$。

$f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2^2-4\lambda_2+5}}, \pm\dfrac{\lambda_2-2}{\sqrt{\lambda_2^2-4\lambda_2+5}})=\dfrac{\lambda_2^2-2\lambda_2+2}{\lambda_2^2-4\lambda_2+5}=\dfrac{\lambda_2+1}{-\lambda_2+4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。よって最大値は $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$、最小値は $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

(3) $F=3x+4y-\lambda(x^2+y^2-1)$。

$F_x=3-2\lambda x=0, F_y=4-2\lambda y=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3}x \Rightarrow x^2=\frac{9}{25} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{5} \Rightarrow y=\pm\frac{4}{5} \Rightarrow f(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5})=\pm 5$。

よって最大値は $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ で５、最小値は $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ で-5。

[4]　与えられた曲線は $(x-y)^2+2y^2=6$ だから楕円。従ってこの曲線上の連続関数は必ず最大値・最小値を持つ。Lagrange の乗数法で見つけることができる。計算は [3] と同様に結構面倒。答えは、$(\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$(複号同順）で最大値 12, $(\pm 1, \mp 1)$(複号同順）で最小値 3.

[5]　線形代数 I I で学習する２次形式の理論を使うと与えられた曲線は楕円であることが分かる。従って原点に一番近い点が存在する。$F=x^2+y^2-\lambda(x^2+xy+y^2-1)$ とおく。

$F_x=2x-2\lambda x-y\lambda=0, F_y=2y-2\lambda y-x\lambda=0 \Longrightarrow y^2=x^2$。$y=x \Longrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y=\pm 1\sqrt{3}$。

$y=-x \Longrightarrow x=\pm 1, y=\mp 1$。$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}, f(\pm 1, \mp 1)=2$。よって原点に一番近い点は $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$、遠い点は $(\pm 1, \mp 1)$.