Calculus 2 Problem Set 1 October 2013

[1] 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $z = \log \frac{y}{x}$.

[2] 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$, (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\log 2)} e^{x-y}$, (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$,

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$, (5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),x\neq 0} \frac{e^y \sin x}{x}$, (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1),x\neq y} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$,

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),x>0,y>0,x\neq 0} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, (8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0),2x-y-1\neq 0} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-1}$

[3] 次の極限は存在しないことを示せ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),y\neq 0} \frac{x^2+y}{y}$

[4] 次の関数 $f(x,y)$ について f_x, f_y を求めよ。

(1) $f(x,y) = 3x^2+2y+1$, (2) $f(x,y) = 2x^2e^y$, (3) $f(x,y) = x^2+e^{xy}$, (4) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$,

(5) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+e^y}$, (6) $f(x,y) = (9x^2y+3x)^{12}$, (7) $f(x,y) = x^2e^{3x}\log y$,

(8) $f(x,y) = (x-\log y)e^{xy}$, (9) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, (10) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{e^x}$

(11) $f(x,y) = 2x^2+3xy-4y^2$, (12) $z = \frac{x}{y}$, (13) $f(x,y) = \log\frac{x}{y}$, (14) $z = x\sin y$,

(15) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, (16) $z = e^x\cos y + e^y \sin x$, (17) $z = (x^2+2y)e^x$,

(18) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, (19) $z = \sin(x+y)\cos(x-y)$.

[5] $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+3x+5y$ について $f_x(2,-3), f_y(2,-3)$ を求めよ。

[6] $f(x,y) = xye^{2x-y}$ について $f_x(1,2), f_y(1,2)$ を求めよ。

[7] 次の関数について 2 階偏微分 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^3y+2xy^2$, (2) $f(x,y) = xe^y+x^4y+y^3$, (3) $f(x,y) = x^2-2xy+y^3$,

(4) $z = \sin(2x-3y)$, (5) $f(x,y) = xe^{2y}$, (6) $z = \log(1+x^2+y^2)$,

(7) $f(x,y) = e^x \sin y - e^y \cos x$, (8) $z = \frac{x-y}{x+2y}$.

[8]　次の関数を ( ) で指示された点において、２次の項までテーラー展開せよ。ただし、剰余項は R_3 とのみ書いておけばよい。

(1)　$f(x,y) = x^2y$, (点 $(1,2)$),　(2)　$f(x,y) = \sin xy$, (点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$),

(3)　$f(x,y) = \sqrt{x+2y}$, (点 $(2,1)$),　(4)　$f(x,y) = \log(1-x+y)$, (点 $(1,1)$).

[9]　次の曲面上の与えられた点における接平面および法線の方程式を求めよ。

(1)　$z = 2x^2 - 3y^2$, 点 $(2,-1,5)$,　(2)　$z = \frac{y}{x}$, 点 $(1,2,2)$,

(3)　$z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, 点 $(0,0,0)$,　(4)　$z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, 点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$,

[10]　次の関数の全微分を求めよ。

(1)　$z = \frac{y}{x}$,　(2)　$z = e^x \sin y$,　(3)　$z = \log\frac{y}{x}$,　(4)　$z = \sqrt{x+2y}$.

[11]　次の関係式から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$,　(2)　$x + \log(y-x) = 1$,　(3)　$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$.

[12]　次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$2x^2 - 4xy + y^2 = 1$, (点 $(2,1)$),　(2)　$x^3 - 6xy + y^3 = 0$, (点 $(3,3)$),

(3)　$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, (点 $(3\sqrt{3}, 1)$),

[13]　次の曲面上の与えられた点における接平面および法線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, 点 $(1,1,1)$,　(2)　$xy - 2yz + 3xz + 2 = 0$ 点 $(2,1,-1)$,

(3)　$x = y^2 + z^2$, 点 $(5,-1,2)$,　(4)　$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$, 点 $(1,1,4)$,

(5)　$xy + yz + zx = 11$, 点 $(1,2,3)$,

[14]　次の関数の与えられた点における線形化を求めよ。

(1)　$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$,　$(1,1)$,　(2)　$f(x,y) = e^x \cos y$,　$(0, \pi/2)$

[15]　適当な線形化を用いて以下の関数の値を近似せよ。

(1)　$f(x,y) = ye^x$ に対して $f(0.01, 0.98)$ の近似値。

(2)　$f(x,y) = \frac{y}{1-x}$ に対して $f(-0.01, 5)$ の近似値。

(3)　$f(x,y) = \sqrt{xy}$ に対して $f(11.9, 3.2)$ の近似値。